CH P3 – Etudier la dynamique d'un système électrique

Programme officiel :

Thème 4 : Ondes et signaux

3. Étudier la dynamique d’un système électrique

Cette partie s’intéresse au comportement capacitif de certains dipôles et étudie le circuit RC comme modèle de ce comportement. Elle permet d’introduire les notions de régime transitoire, de régime stationnaire et de temps caractéristique, et de modéliser un phénomène par une équation différentielle.
Les capteurs sont présents dans de nombreux secteurs : dans le domaine de l’électronique, les MEMS (systèmes micro-électromécaniques) dont certains sont de type capacitif comme les capteurs d’accélération, dans la technologie des écrans tactiles, dans des dispositifs permettant de contrôler et de réguler les consommations d’énergie, dans le domaine de l’agroalimentaire ou de la chimie avec par exemple des capteurs de proximité (contrôle du remplissage de cuves), dans les objets dits « connectés » où ils sont associés à d'autres capteurs.
En biologie, ce modèle permet de rendre compte, par analogie, du comportement de systèmes complexes.
La mise en œuvre expérimentale de cette partie du programme est l’occasion d’utiliser des multimètres, des microcontrôleurs associés à des capteurs, des cartes d’acquisition, des oscilloscopes, etc.

Notions abordées en classe de première (enseignement de spécialité) :
Lien entre intensité d’un courant continu et débit de charges, modèle d’une source réelle de tension continue, puissance, énergie, bilan de puissance dans un circuit, effet Joule, rendement d’un convertisseur.

Notions et contenus	Capacités exigibles Activités expérimentales support de la formation
Intensité d’un courant électrique en régime variable.	Relier l’intensité d’un courant électrique au débit de charges.
Comportement capacitif.	Identifier des situations variées où il y a accumulation de charges de signes opposés sur des surfaces en regard.
Modèle du condensateur. Relation entre charge et tension ; capacité d’un condensateur.	Citer des ordres de grandeur de valeurs de capacités usuelles. *Identifier et tester le comportement capacitif d'un dipôle.* *Illustrer qualitativement, par exemple à l'aide d'un microcontrôleur, d’un multimètre ou d'une carte d'acquisition, l'effet de la géométrie d'un condensateur sur la valeur de sa capacité.*
Modèle du circuit RC série : charge d’un condensateur par une source idéale de tension, décharge d’un condensateur, temps caractéristique.	Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d’un condensateur dans le cas de sa charge par une source idéale de tension et dans le cas de sa décharge.
Capteurs capacitifs.	Expliquer le principe de fonctionnement de quelques capteurs capacitifs. *Étudier la réponse d’un dispositif modélisé par un dipôle RC.* *Déterminer le temps caractéristique d'un dipôle RC à l’aide d’un microcontrôleur, d’une carte d’acquisition ou d’un oscilloscope.* **Capacités mathématiques :** Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec un second membre constant.

CH P3 – Etudier la dynamique d'un système électrique

1. Intensité et tension

1.1. Rappels de 1ère

En 1ère nous avons vu que le courant électrique est dû à un déplacement de porteurs de charges électriques (les électrons libres dans les métaux, les ions dans les solutions ioniques). Nous avons également défini l'intensité du courant électrique continu comme étant le débit de charges électriques traversant un conducteur :

$$I = \frac{|Q|}{\Delta t}$$

I : intensité en ampère (A) ;
| Q | : valeur absolue de la charge électrique en coulomb (C) ;
Δt : durée en seconde (s).

Par ailleurs, il est bon de se souvenir que nous avons défini au collège et revu en seconde :

- le sens du courant électrique : « *Par convention à l'extérieur du générateur le sens du courant dans un circuit va de la borne + du générateur à la borne –* » ;
- la loi des mailles (loi d'additivité des tensions $U_{AC} = U_{AB}+U_{BC}$) ;
- la loi des nœuds (loi d'additivité des intensités $I_1=I_2+I_3$ si I_1 arrive à un nœud et I_2 et I_3 en repartent) ;
- la loi d'ohm ($U = R\times I$).

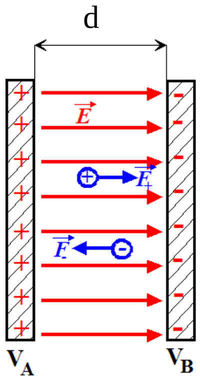
1.2. Le régime variable

On se place maintenant en régime variable, c'est-à-dire que l'intensité du courant n'est pas continue, elle varie en fonction du temps.
Ainsi I devient i(t) : intensité du courant en fonction du temps ; Q devient dq(t) : charge qui varie en fonction du temps ; et Δt devient dt : durée très courte.
On obtient :

$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$$

2. Le condensateur

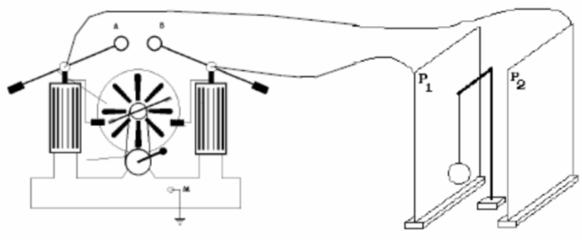
2.1. Rappels de 1ère

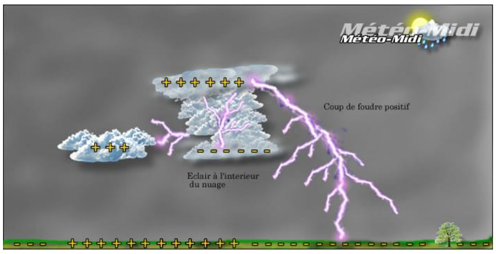


En 1ère nous avons vu qu'une particule chargée peut subir une interaction électrostatique si elle est placée dans un champ électrostatique.
Par ailleurs, nous avons vu qu'il est possible d'avoir un champ uniforme $\vec{E}$ en appliquant une tension $U=V_A-V_B$ entre deux plaques métalliques parallèles distantes de d : E = U / d.

De telles plaques constituent un condensateur.

Nous avons également vu comment accumuler des charges de signes opposés sur des surfaces en regard grâce par exemple à la machine de Wimshurt et son carillon électrostatique.

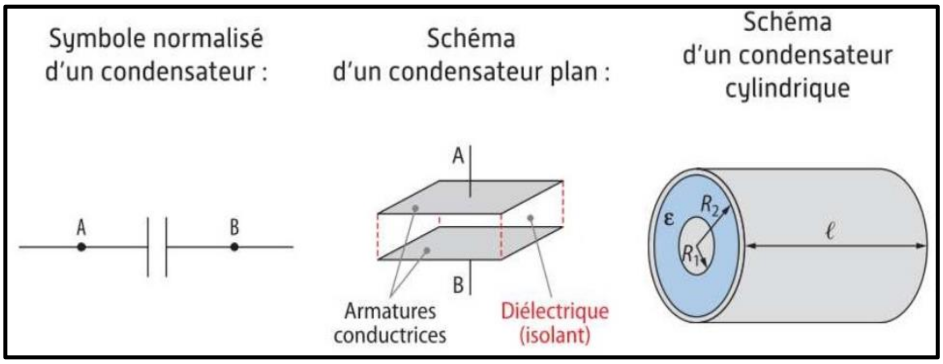




De même dans la nature, un nuage d'orage crée les conditions favorables à l'accumulation de charges électriques et donc devient un condensateur géant.

2.2. Définitions

Un condensateur est constitué de deux conducteurs proches (**les armatures**) séparés d'un isolant (**le diélectrique**). Le condensateur peut-être plan ou cylindrique.



La charge q d'un condensateur est proportionnelle à la tension à ses bornes, ainsi :

$$\mathbf{q = C \times u}$$

q : charge du condensateur en coulomb (C) ;
C : capacité du condensateur en farad (F) ;
u : tension aux bornes du condensateur en volt (V).

La capacité C dépend de la géométrie du condensateur et de la nature de l'isolant, ainsi :

$$C = \varepsilon \times \frac{S}{e}$$

ε : permittivité de l'isolant (en $F.m^{-1}$) – grandeur qui montre le caractère isolant ou conducteur d'un matériau ;
S : surface d'une armature (en m²) ;
e : épaisseur de l'isolant (en m).

La valeur des capacités usuelles varie de quelques picofarads à quelques millifarads.

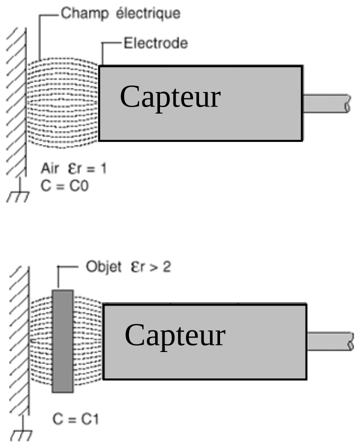
Remarque : Une autre caractéristique des condensateurs est la tension limite appelée **tension de claquage**. En effet, une tension trop grande va rendre l'isolant conducteur. Un courant violent peut alors traverser le diélectrique ce qui va détruire le composant.
C'est un peu ce qu'il se passe avec un orage quand la tension entre le nuage et le sol est trop élevée. L'air qui est un isolant, devient conducteur et un violent courant peut alors s'établir entre le nuage et le sol : c'est la foudre.

2.3. Les capteurs capacitifs

Un condensateur est utilisé principalement pour stabiliser une alimentation électrique, traiter des signaux périodiques, séparer le courant alternatif du courant continu ou stocker de l'énergie.

Il existe également des capteurs capacitifs qui sont comme des condensateurs ouverts et qui permettent de nombreuses mesures : détection de déplacements, de distances, d'accélérations … et … le toucher sur des écrans tactiles.

Le principe de ces capteurs repose sur le fait qu'un objet placé dans le champ électrostatique du capteur, va modifier la capacité du condensateur ouvert car la permittivité ε va changer.

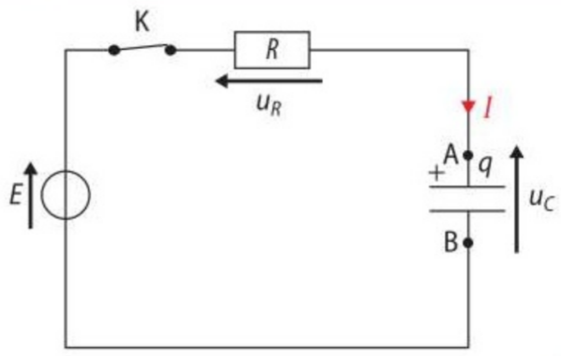


3. Le circuit RC

3.1. Charge d'un condensateur

Le circuit :

Le circuit est constitué d'un générateur de tension qui délivre une tension E constante ; d'un dipôle ohmique de résistance R en série avec un condensateur de capacité C.



L'équation différentielle :

La loi d'additivité des tensions (loi des mailles) nous permet d'écrire que :

$$\mathbf{E = u_C + u_R} \qquad \mathbf{(1)}$$

On sait également que : $i = \frac{dq}{dt}$ $\quad q = C \times u_C$ $\quad u_R = R \times i$

Ainsi : $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C \times u_C) = \frac{dC}{dt} \times u_C + C \times \frac{d\,u_C}{dt}$

en math : (u × v)' = u'v + uv'

En considérant que C est une constante, alors $\frac{dC}{dt} = 0$ d'où $i = C \times \frac{d\,u_C}{dt}$

L'équation (1) devient : $E = u_C + R \times C \times \frac{d\,u_C}{dt}$

Soit : $$\boxed{\mathbf{E = u_C + RC\,u_C'}} \qquad \mathbf{(2)}$$

C'est une équation différentielle du 1er ordre avec second membre constant.

La solution :

Savoir faire la résolution

En mathématique je sais qu’une équation différentielle de type : $y' = ay + b$
admet comme solution générale : $y_c(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ $\quad C \in \mathbb{R}$
et qu’une solution particulière permet de déterminer la constante C.

Pour résoudre l’équation (2) je pose : $y \to u_c$ $\quad x \to t$
Et je change aussi le nom de la constante C pour ne pas faire de confusion avec la capacité C du condensateur $C \to K$

L’équation (2) devient donc : $u_C' = -\frac{1}{RC}u_C + \frac{E}{RC}$

avec $a \to -\frac{1}{RC}$ et $b \to \frac{E}{RC}$

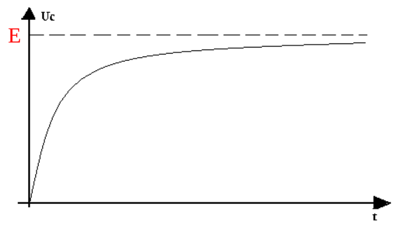
La **solution générale** est donc : $u_C = K e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{\frac{E}{RC}}{-\frac{1}{RC}}$ $\quad K \in R$

soit : $\mathbf{u_C = K e^{-\frac{t}{RC}} + E}$ $\quad \mathbf{K \in R}$

Enfin, on considère qu’à t = 0, le condensateur est totalement déchargé, donc $\mathbf{u_C(0) = 0}$.

Cette **condition initiale** doit vérifier la solution générale donc :
$u_C = K e^{-\frac{0}{RC}} + E = K e^0 + E = K + E = 0$ $\quad$ d’où $K = -E$

La solution est donc : $u_C = -E e^{-\frac{t}{RC}} + E = E\left(-e^{-\frac{t}{RC}} + 1\right)$

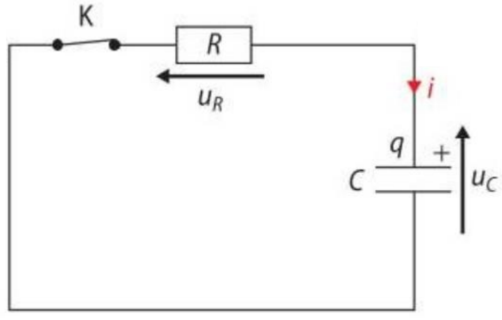


Que l’on écrit sous la forme : $\boxed{u_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$

3.2. Décharge d’un condensateur

Le circuit :

Le circuit est constitué uniquement d’un dipôle ohmique de résistance R en série avec un condensateur de capacité C.



L’équation différentielle :

Savoir faire la démonstration

On suit la même démarche que pour la charge, ainsi à partir de la loi d’additivité des tensions qui dit que :

$$\mathbf{u_C + u_R = 0}$$

on trouve que : $\boxed{\mathbf{u_C + RC\,u_C' = 0}}$ $\quad$ **(3)**

C’est une équation différentielle du 1er ordre <u>sans</u> second membre.

La solution :

Savoir faire la résolution

En mathématique je sais qu'une équation différentielle de type : y' = ay
admet comme solution générale : $y_c(x) = Ce^{ax}$ $C \in \mathbb{R}$
et qu'une solution particulière permet de déterminer la constante C.

Pour résoudre l'équation (3) je suis la même démarche que pour la charge.

L'équation (3) devient donc : $u'_C = -\frac{1}{RC}\, u_C$

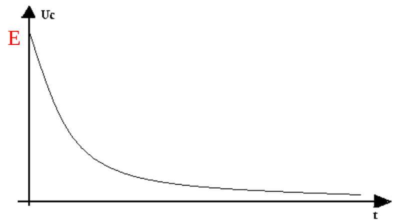
La **solution générale** est donc : $\mathbf{u_C = K\, e^{-\frac{1}{RC}t}}$ $\mathbf{K \in R}$

Enfin, on considère qu'à t = 0, le condensateur est chargé avec à ses bornes une tension E, donc **u_C(0) = E**.

Cette **condition initiale** doit vérifier la solution générale donc :

$u_C = K\, e^{-\frac{0}{RC}} = K\, e^0 = E$ d'où K = E

La solution est donc : $\boxed{\mathbf{u_C = E\, e^{-\frac{t}{RC}}}}$



3.3. Temps caractéristique

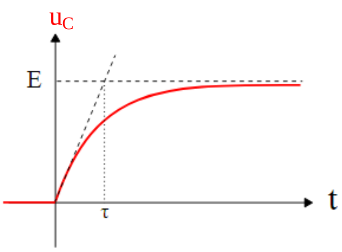
Que ce soit pour la charge ou la décharge du condensateur, on constate que la fonction exponentielle varie avec un terme en $-\frac{1}{RC}$. On définit alors la **constante de temps caractéristique** τ (lettre grecque tau) par :

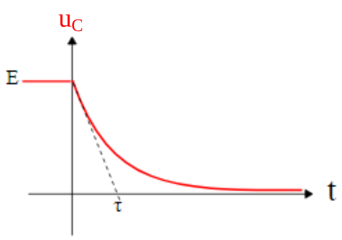
$$\boxed{\boldsymbol{\tau = R \times C}}$$

Avec τ : temps caractéristique en s ;
R : résistance en Ω ;
C : capacité en F.

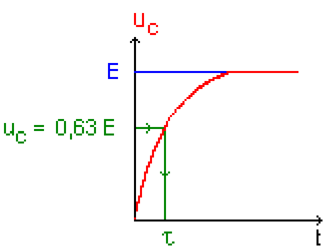
Cette constante de temps caractéristique **τ** peut se déterminer graphiquement.

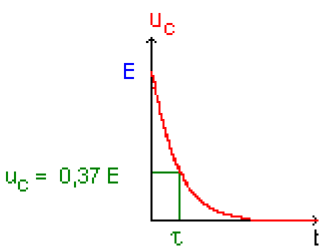
Méthode de la tangente à l'origine :





Méthode des 63% (charge) ou des 37% (décharge) :





L'expression de la charge s'écrit $u_C = E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Pour **t = τ** on a :
$u_C = E\,(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) = E\left(1 - e^{-1}\right) = E(1-0.37) = 0{,}63 \times E$
Soit **u_C = 63% de E**.

Pour **t = 5τ** on a : **u_C = 99% de E**
On considère alors que la valeur finale est atteinte.